

## Задача идентификации плоскости маневра в упрощенной постановке

к.т.н. Коробочкин Юрий Борисович, главный научный сотрудник АО «КБ «Аметист»,  
тел.:8(495) 600-93-33

### Введение

Задача идентификации типа движения цели и оценивания параметров ее движения по результатам радиолокационных измерений является важнейшей практической задачей. Решению таких задач посвящено колоссальное количество исследований. Подавляющее число научно-технической литературы посвящено исследованиям или линейных систем, или нелинейных, но которые можно линеаризовать. Стремление авторов к линеаризации вполне оправдано, так как позволяет решать такие задачи, используя конструктивный аппарат Калмановской фильтрации. Но не во всех случаях задачу оценивания можно линеаризовать, не потеряв при этом ее физический (технический) смысл. Примером может служить задача установления факта, что движение цели принадлежит некоторому типу движения, имеющего параметрическое описание. Одним из возможных методов решения задач такого рода является метод максимального правдоподобия (ММП). Применение этого метода приводит к задачам нелинейного программирования большой размерности, которые не всегда удается эффективно решать даже численными методами. В ряде случаев решение задачи идентификации типа движения цели может быть редуцировано к решению последовательности некоторых задач, решение каждой из которых значительно проще, чем решение исходной задачи. Например, если известно, что идентифицируемое движение принадлежит семейству плоских кривых, то можно, сначала, идентифицировать плоскость, в которой происходит движение, а, затем идентифицировать это движение в рамках этой плоскости. Причем, если гипотеза плоского движения оказалась несостоятельной, то и гипотеза о параметрическом движении вдоль плоской кривой также будет несостоятельной. В настоящей статье рассматривается применение метода максимального правдоподобия к решению задачи идентификации параметров плоскости, в которой предположительно двигается цель. В статье показано, что задача нелинейного программирования большой размерности, возникающая при применении ММП, может быть сведена к задаче приведения некоторой симметрической неотрицательно определенной матрицы размерности  $3 \times 3$  к диагональному виду. Приведен иллюстрирующий пример.

### 1. Постановка задачи идентификации плоскости маневра в упрощенном варианте

Будем считать, что задача идентификации плоскости маневра на момент времени  $t_N$  решается по результатам измерений вектора положения цели в моменты времени

$t_i, i=1, \dots, N, t_1 < t_2 < \dots < t_N :$

$$x_i^* = x_i + \xi_i$$

$x_i^* \in \mathbb{R}^3$  - вектор измеренных координат цели,  $x_i$  - вектор истинных координат цели,  $\xi_i$  - вектор ошибок измерений, являющийся векторным дискретным белым шумом с Гауссовым распределением:

$$M \xi_i = 0, M \xi_i \xi_i^T = D_i, M \xi_i \xi_j^T = 0, i \neq j,$$

$M$  - символ математического ожидания,  $D_i$  - корреляционная матрица ошибок измерения в момент  $t_i$  (строго положительно-определенная).

Уравнение плоскости может быть записано в виде

$$\langle x, n \rangle - a = 0, \quad (1.1)$$

Где  $n$  - вектор единичной нормали плоскости,  $a$  - константа, равная расстоянию от начала координат до плоскости.  $\langle *, * \rangle$  - символ скалярного произведения.

Применение ММП приводит к следующей оптимизационной задаче относительно

параметров плоскости  $n$ ,  $a$  и векторов оценок  $x_i$ ,  $i=1, \dots, N$ :

$$F(x) = \sum_{i=1}^N (x_i - x_i^*)^T D_i^{-1} (x_i - x_i^*) \rightarrow \min_{x_i, a, n}, \quad (1.2)$$

$$\langle n, x_i \rangle - a = 0, \quad i=1, \dots, N, \quad (1.3)$$

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - 1 = 0 \quad (1.3)$$

Упростим полученную задачу математического программирования (1.2)-(1.3). Если траектория цели на интервале измерений находится достаточно далеко от измерительного средства, то корреляционные матрицы ошибок измерения будут изменяться незначительно и можно считать, что они постоянны. Но такое предположение не дает возможности обрабатывать измерительную информацию, поступающую от нескольких независимых источников, имеющих разную точность. Примем допущение, что корреляционные матрицы ошибок этих измерительных средств примерно пропорциональны и мы располагаем коэффициентом пропорциональности. Тогда, в каждый момент времени корреляционная матрица ошибок измерений может быть записана в виде:

$$D_i = \alpha_i^2 D. \quad (1.4)$$

$D$  - некоторая известная корреляционная матрица,  $\alpha_i^2$  - известные коэффициенты. В частности, если информация поступает от единственного источника, то  $\alpha_i^2 = 1$ ,  $i=1, \dots, N$ , и корреляционная матрица ошибки измерения не зависит от времени.

## 2. Решение оптимизационной задачи

Введем в рассмотрение неотрицательно определенную, симметрическую матрицу

$$Q = \sum_{i=1}^N \alpha_i^{-2} x_i^* x_i^{*T} - \frac{\sum_{i=1}^N \alpha_i^{-2} x_i^* \sum_{i=1}^N \alpha_i^{-2} x_i^{*T}}{\sum_{i=1}^N \alpha_i^{-2}}. \quad (1.5)$$

Приведем матрицу  $D$  к диагональному виду:

$$D = h M h^T,$$

$h$  - матрица собственных векторов,  $M$  - диагональная матрица собственных чисел.

Введем в рассмотрение еще одну симметрическую неотрицательно-определенную матрицу:

$$R = M^{-\frac{1}{2}} h^T Q h M^{-\frac{1}{2}}, \quad (1.7)$$

Приведем ее к диагональному виду:  $R = g \Lambda g^T$ .

Найдем минимальное собственное число матрицы  $R$ . Пусть это число имеет номер  $k$ :

$$\Lambda_{k,k} = \min \{ \Lambda_{1,1}; \Lambda_{2,2}; \Lambda_{3,3} \}, \text{ и ему соответствует собственный вектор } g_k.$$

**Утверждение:** Параметры плоскости маневра имеют следующую взаимосвязь с собственным вектором  $g_k$ , соответствующим минимальному собственному числу матрицы  $R$ :

$$n = \frac{h M^{-\frac{1}{2}} g_k}{\left\| h M^{-\frac{1}{2}} g_k \right\|}, \quad (1.6)$$

$$a = \frac{\langle n, \sum_{i=1}^N \alpha_i^{-2} x_i^* \rangle}{\sum_{i=1}^N \alpha_i^{-2}}, \quad (1.7)$$

Минимум целевой функции (1.2) равен минимальному собственному числу  $\Lambda_{k,k}$ , а оптимальные оценки векторов положения цели могут быть найдены по формулам:

$$x_i = x_i^* + \frac{a - \langle n, x_i^* \rangle}{\langle D_i n, n \rangle} D_i n \quad (1.8)$$

**Доказательство:**

Зафиксируем параметры плоскости  $n$  и  $a$ . Тогда, задача минимизации (1.2) -(1.3) распадается на  $N$  подзадач:

$$f_i(x, a, n) = (x - x_i^*)^T D_i^{-1} (x - x_i^*) \rightarrow \min_x \quad (1.9)$$

$$\langle x, n \rangle - a = 0. \quad (1.10)$$

Нетрудно убедиться, что минимум функции  $f_i(x, a, n)$  по  $x$  равен:

$$\varphi_i(a, n) = \min_{x: \langle x, n \rangle - a = 0} f_i(x, a, n) = \frac{a^2 - 2a \langle n, x_i^* \rangle + \langle n, x_i^* \rangle^2}{\langle D_i n, n \rangle} \quad (1.11)$$

и достигается на  $x_i$  из (1.8). Поэтому, задача (1.2) -(1.3) сводится к задаче поиска минимума нелинейной функции 4-х переменных с одним квадратичным ограничением типа равенства:

$$\varphi(a, n) = \sum_{i=1}^N \varphi_i(a, n) \rightarrow \min, \quad (1.12)$$

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - 1 = 0 \quad (1.13)$$

Если справедливо предположение(1.4), то

$$\varphi(a, n) = \frac{a^2 \sum_{i=1}^N \frac{1}{\alpha_i^2} - 2a \langle n, \sum_{i=1}^N \frac{x_i^*}{\alpha_i^2} \rangle + n^T \sum_{i=1}^N \frac{1}{\alpha_i^2} x_i^* x_i^{*T} n}{\langle Dn, n \rangle}$$

$\varphi(a, n)$  - квадратичная по  $a$  функция. Минимизируя функцию  $\varphi(a, n)$  по  $a$ , находим:

$$\Phi(n) = \min_a \varphi(a, n) = \frac{n^T Qn}{n^T Dn}, \quad (1.14)$$

где  $Q$  и  $a$  определены в (1.5) и (1.7)

В результате, исходная задача свелась к задаче минимизации отношения 2-х симметрических квадратичных форм

$$\Phi(n) = \frac{n^T Qn}{n^T Dn} \rightarrow \min_{n \in \mathbb{R}^3}. \quad (1.15)$$

Квадратичная форма, стоящая в числителе, неотрицательно определена, а в знаменателе определена строго положительно. Как известно, для пары квадратичных форм, одна из которых положительно-определена, существует общий базис, в котором обе формы имеют канонический (диагональный) вид, причем строго положительно - определенная форма  $n^T Dn$  может быть приведена к каноническому виду с коэффициентами равными 1. Пусть  $B$  - матрица перехода в общий базис. Тогда, функция (1.15) имеет вид:

$$\Phi(n) = \frac{\sum_{k=1}^3 \lambda_k \eta_k^2}{\sum_{k=1}^3 \eta_k^2}, \quad \eta = Bn,$$

а минимум этой функции равен минимальному коэффициенту  $\lambda_k$ . Нетрудно убедиться, что матрицей перехода в такой базис является  $B = g^T M^{-\frac{1}{2}} h^T$ , что и доказывает Утверждение.

Доказанное утверждение позволяет находить оптимальную оценку параметров плоскости, но не дает ответа о статистической состоятельности гипотезы плоского движения. Для ответа на этот вопрос воспользуемся критерием  $\chi^2$ . Пусть  $\Lambda_{k,k}$  - минимальное собственное число матрицы  $R$  из **Ошибка! Источник ссылки не найден.** Тогда:

$$\sum_{i=1}^N (x_i - x_i^*)^T D_i^{-1} (x_i - x_i^*) = \Lambda_{k,k}, \quad (1.16)$$

где  $x_i$  - оценки векторов положений (1.8). Подставим выражение (1.8) для  $x_i$  в правую часть равенства (1.16). Выполняя элементарные преобразования, получаем:

$$\Lambda_{k,k} = \sum_{i=1}^N \frac{\zeta_i^2}{\sigma_{\zeta_i}^2},$$

где  $\zeta_i = n^T \xi_i$  - скалярная случайная величина с дисперсией  $\sigma_{\zeta_i}^2 = n^T D_i n$ .

Полученное выражение для  $\Lambda_{k,k}$  дает возможность воспользоваться критерием  $\chi^2$ . В частности, если  $N > 30$ , в соответствии с критерием Фишера, можно получить критерий несостоятельности гипотезы плоского движения по уровню вероятности 0,997 [1]:

$$\sqrt{2\Lambda_{k,k}} > \sqrt{2N} + 2. \quad (1.17)$$

### Пример:

Пусть истинное движение цели происходит по окружности с постоянной скоростью  $V_y = 500$  м/с, лежащей в вертикальной плоскости  $OXZ$  прямоугольной системы координат.

Центр окружности расположен в точке  $S_y^T = \|D \cos \varepsilon \quad 0 \quad D \sin \varepsilon\|$ ,  $D = 5000$  м - расстояние от центра до начала координат,  $\varepsilon = 45$  град - угол места центра окружности. Картинка с изображением траектории приведена на рисунке 1. Параметры плоскости, входящие в уравнение (1.1) равны соответственно:  $n^T = \|0 \quad 1 \quad 0\|$ ,  $a = 0$ . Ошибки измерений по осям координат приняты независимыми, имеющими дисперсии  $625 \text{ м}^2$ . Наблюдения производятся в течение 10 секунд с частотой 100 Гц, алгоритм идентификации плоскости начинает работать через 2 секунд от момента начала измерений.

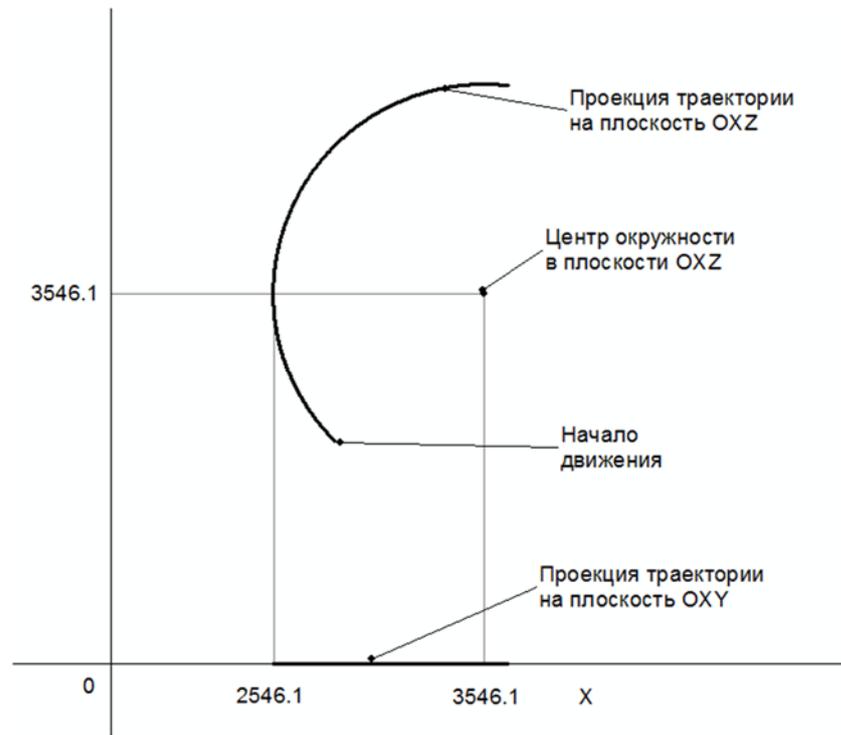


Рисунок 1- Истинная траектория движения.

Ниже приводятся результаты имитационного моделирования алгоритма идентификации плоскости.

На рисунке 2 приведены графики функций  $Y = \sqrt{2\Lambda_{k,k}}$  и  $Y = \sqrt{2N} + 2$  в зависимости от времени, входящих в критерий (1.17). Неравенство  $\sqrt{2\Lambda_{k,k}} < \sqrt{2N} + 2$  выполнено на всем протяжении работы алгоритма и идентификация плоскости производится без ошибок

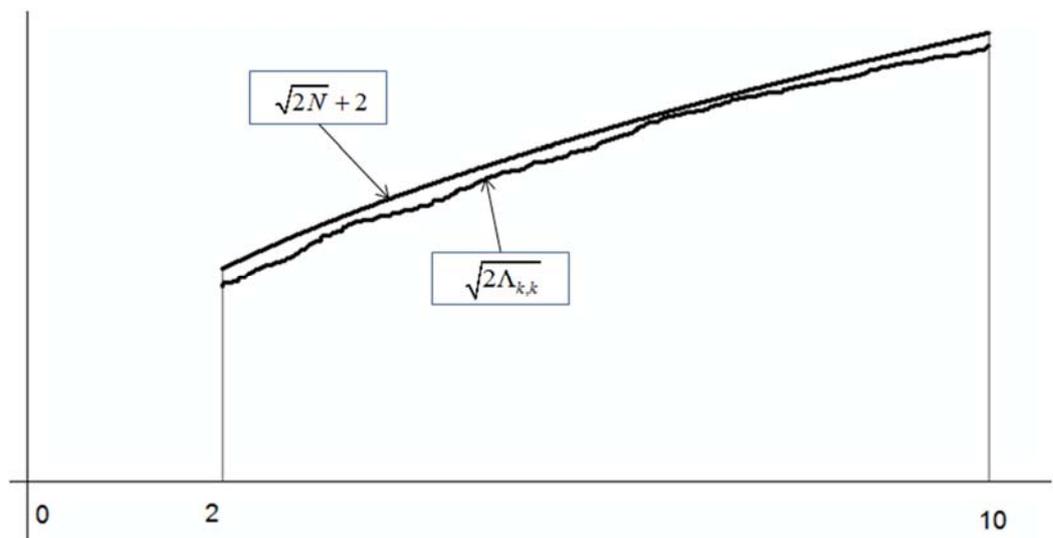


Рисунок 2 – Графики функций правдоподобия и порога.

На рисунке 3 и рисунке 4 приведены графики зависимостей ошибок определения угла нормали плоскости и параметра плоскости.

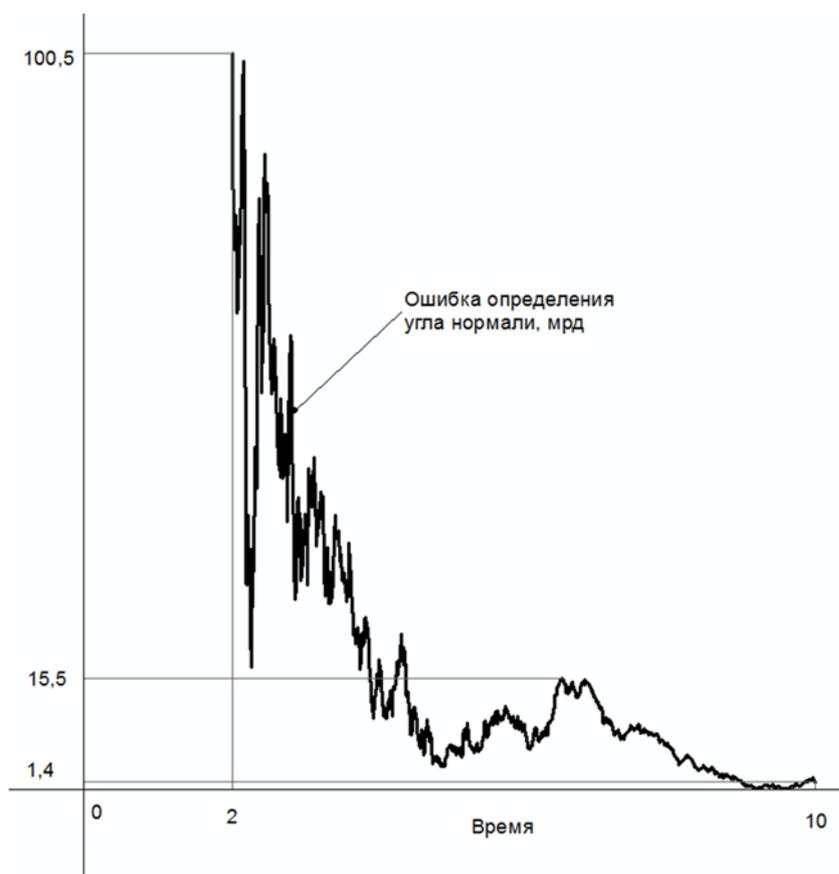


Рисунок 3 – Ошибка определения угла нормали плоскости

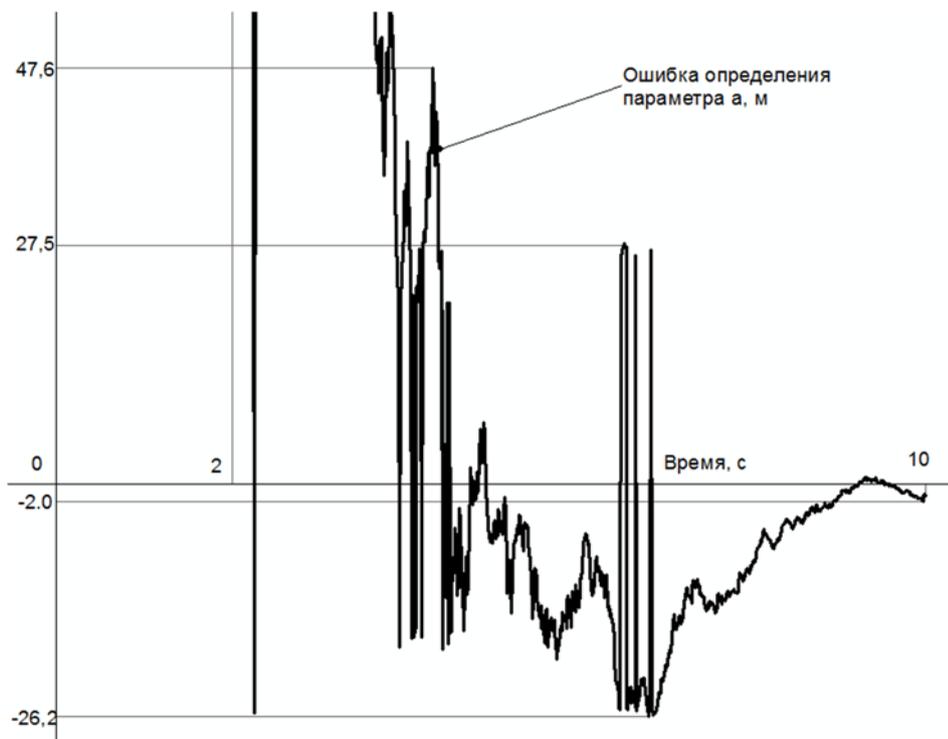


Рисунок 4- Ошибка определения параметра  $a$

Из рисунков видно, что с возрастанием интервала наблюдения, ошибки определения угла нормали плоскости и параметра плоскости уменьшаются и достигают величин 1,4 мрад и 2 м соответственно.

### **Выводы:**

Рассмотрена задача идентификации плоскости движения цели по результатам измерений вектора положения.

Эта задача является промежуточной задачей при решении ряда задач, возникающих при идентификации маневра цели.

Для решения задачи идентификации плоскости применен метод максимального правдоподобия, который приводит к сложной задаче нелинейного программирования большой размерности. В статье показано, что эта сложная задача математического программирования, при ряде допущений относительно корреляционных матриц ошибок измерений, может быть сведена к простой задаче приведения неотрицательно определенной симметрической матрицы к диагональному виду.

Применение предлагаемого метода идентификации плоскости проиллюстрировано на примере.

### **Литература**

1. Крамер Г. Математические методы статистики. М.: «Мир», 1975.

Главный научный сотрудник

Ю.Б. Коробочкин