

УДК 531.551.3

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ТОЧКЕ ВСТРЕЧИ

А.Т. Бекишев – д.т.н., генеральный директор - генеральный конструктор, АО «Конструкторское бюро «Аметист»

Ю.Б. Коробочкин – к.т.н., главный научный сотрудник, АО «Конструкторское бюро «Аметист»

Рассматриваются численные методы решения задачи о точке встречи, возникающей при проектировании систем управления сложными радиоэлектронными комплексами. Отличительной особенностью рассматриваемых задач является функциональная зависимость от начальных условий правой части системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающей динамику объекта управления. Предлагается обобщение системы дифференциальных уравнений в вариациях для вычисления матрицы Якоби решения системы дифференциальных уравнений. Производится адаптация метода Ньютона для решения возникающей системы нелинейных уравнений, анализ эвристического метода пристрелки по углу, его усовершенствование и сравнение с методом Ньютона. Анализируется точность решения задачи о точке встречи для случая зашумленных исходных данных.

***Ключевые слова:** внешняя баллистика, краевая задача, цель, точка встречи, метод Ньютона, метод пристрелки.*

NUMERICAL SOLUTION OF THE PROBLEM OF A CROSSING POINT

Bekishev A. T. – Full Professor, Doctor of Sc., Director General and General Designer, JSC Ametist Design Bureau

Yu. B. Korobochkin – Ph.D., Chief Researcher, JSC Ametist Design Bureau

This article aims at the study and comparison of various numerical methods for solving practical problem of finding of crossing point. This type of problem is

typical in area of applications in designing of complicated electronic control systems.

Distinctive feature of studied problem is the functional dependence on the initial conditions right side of the system of ordinary differential equations describing the dynamics of the control object.

In the article, the authors dilate system of differential equations for Jacoby matrix, then adapts Newton's method for the solution of arising system of the nonlinear equations, then analyzes and improves heuristic false position method, then compares it to the Newton's method.

In conclusion, the author analyzes the accuracy of the solution of the crossing point problem for the case of noisy input data.

Keywords: *exterior ballistics, crossing point, Newton's method, boundary problem, false position method*

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье рассматривается задача нахождения точки пересечения траекторий двух объектов, движение одного из которых описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений и управляется по начальным условиям. Эта задача является краевой задачей теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Область приложения таких задач весьма широка – это техника, экономическая динамика, биология, медицина, и т.д. В системах управления сложными радиоэлектронными комплексами типичной является задача управления стрельбой артиллерийским снарядом. В этом случае в качестве объектов выступают материальные точки, представляющие артиллерийский снаряд и цель, и управление движением первой точки состоит в вычислении таких углов прицеливания, при которых траектории точек пересекутся. Возникающая при этом краевая задача может быть сведена к решению системы нелинейных алгебраических уравнений специального вида относительно неизвестных параметров, включающих начальные условия движения точки 1 [1]. Задачи такого типа решались из соображений здравого

смысла задолго до появления вычислительной техники, в полевых условиях и без применения каких-либо математических методов. С тех пор были унаследованы некоторые способы их решения, которые в настоящее время трансформировались в эвристические методы и достаточно успешно применяются на практике. К числу таких методов относится метод «пристрелки», подробно описанный в [1], [2]. Основным преимуществом этого метода является быстрдействие. Численная реализация этого метода не требует вычисления частных производных по начальным условиям фазового вектора, описывающего движение точки 1. Однако, в процессе моделирования я обнаружил, что итерационный процесс решения задачи о точке встречи, построенный на методе «пристрелки», в ряде случаев расходится и не приводит к правильному решению. Это подтолкнуло меня, во-первых, к выяснению причин расходимости метода пристрелки, и, во-вторых, к поиску альтернативных численных методов решения возникающей системы нелинейных уравнений. В качестве альтернативных методов я выбрал методы, основанные на методе Ньютона [3]. Однако, применение таких методов требует на каждом шаге итерационного процесса вычисления матрицы Якоби (матрицы частных производных) функций, входящих в систему нелинейных уравнений. Это влечет за собой существенное увеличение объема вычислений, поскольку матрица Якоби является решением матричного дифференциального уравнения в вариациях. Метод Ньютона обладает еще одним серьезным недостатком – он может расходиться, если начальное приближение выбрано неудачно (достаточно далеко от решения). Поэтому, применение такого метода требует «доводки» к рассматриваемому классу задач.

В ряде прикладных задач правая часть системы дифференциальных уравнений, описывающих движение точки 1, функционально зависит от начальных условий, по которым ведется управление движением. В качестве примера можно привести случай, когда коэффициент лобового сопротивления C_x функционально зависит от начального угла бросания.

Этот случай заслуживает специального рассмотрения, поскольку решение задач с такой правой частью требует некоторого обобщения уравнения в вариациях.

В связи с этим возникает целый ряд инженерных вопросов:

Можно ли определить границы применимости метода пристрелки?

Можно ли усовершенствовать метод пристрелки таким образом, чтобы он работал корректно во всех случаях, и в случае положительного ответа, насколько целесообразно его в этом случае использовать?

Насколько надежно работает метод Ньютона?

Как вычислять матрицу Якоби в случае, когда правая часть системы дифференциальных уравнений функционально зависит от начального условия – параметра управления?

Помимо этого, следует иметь в виду, что, как правило, задача о точке встречи решается по неточным исходным данным. Часть параметров, описывающих движение точек 1 и 2, являются выходами алгоритмов фильтрации (цифровой или аналоговой), часть параметров имеет свои разбросы (допуски) и т.д. В связи с этим возникают вопросы оценки точности решения задачи о точке встречи.

Статья построена следующим образом. В разделе 1 производится «доводка» метода Ньютона к рассматриваемому классу задач о точке встречи. Предлагается обобщение системы дифференциальных уравнений в вариациях для случая функциональной зависимости правой части от начальных условий.

В разделе 2 рассматривается метод «пристрелки по углу», выясняются условия, при которых метод может расходиться, предлагается усовершенствованный «метод пристрелки». Предлагается подход к определению границ корректного применения метода пристрелки по углу, который иллюстрируется на простейшем примере баллистического движения точки 1.

В разделе 3 рассматривается задача оценки точности решения задачи о точке встречи, полученные результаты иллюстрируются на примере.

1. СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ О ТОЧКЕ ВСТРЕЧИ К СИСТЕМЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Будем считать, что движение точки 1 описывается системой обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, а движение второй точки задано и описывается гладкими функциями времени:

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(t), \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \quad (1)$$

Фазовый вектор $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, описывающий движение 1-ой материальной точки, удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n \quad (2)$$

Часть компонент вектора начальных условий движения первой точки заданы, а часть не задана и подлежит определению

$$\mathbf{x}^T(0) = \left\| \mathbf{a}^T \quad \mathbf{z}^T \right\| \quad (3)$$

$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n-m}$ - заданная часть начальных условий, а $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ - не заданная часть начальных условий фазового вектора, которая может варьироваться. Задача состоит в нахождении такого вектора начальных условий \mathbf{z} , при котором в некоторый момент времени T траектории $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{y}(t)$ пересекутся:

$$x_i(T) - g_i(T) = 0, i = 1, 2, 3 \quad (4)$$

Будем предполагать, что первые 3 координаты фазовых векторов точек 1 и 2 соответствуют векторам положения этих точек в 3-х мерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 .

На вектор \mathbf{z} могут быть наложены дополнительные ограничения в форме равенств:

$$\varphi_i(\mathbf{z}) = 0, i = 1, \dots, k \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\varphi}^T(\mathbf{z}) = \left\| \varphi_1(\mathbf{z}) \quad \dots \quad \varphi_k(\mathbf{z}) \right\| - \text{заданная вектор функция.}$$

Задача **Ошибка!** **Источник** **ссылки** **не** **найден.**
Ошибка! **Источник** **ссылки** **не** **найден.** является классической нелинейной краевой задачей.

При фиксированном векторе \mathbf{z} фазовый вектор \mathbf{x} является решением задачи Коши и в каждый момент времени является функцией своих начальных условий. Поэтому, если $k + 3 = m + 1$, то эта задача сводится к решению системы $k + 3$ нелинейных уравнений (4),(5) относительно $m + 1$ неизвестных (m неизвестных начальных условий плюс время встречи).

Рассмотрим применение метода Ньютона к решению этой системы уравнений. Метод Ньютона предполагает на каждом шаге вычисление матрицы частных производных фазового вектора решения системы дифференциальных уравнений (2) (матрицы Якоби) по начальным условиям \mathbf{z} . Матрица частных производных $\mathbf{H}(t)$ вектор функции решения этой системы по начальным условиям \mathbf{z}

$$\mathbf{H}(t) = \frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial \mathbf{z}}$$

удовлетворяет системе линейных однородных дифференциальных уравнений в вариациях [1],[2],[3]:

$$\dot{\mathbf{H}}(t) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{H}(t), \quad (6)$$

$$\mathbf{H}(0) = \left\| \begin{array}{c} \mathbf{0}_{(n-m) \times m} \\ \mathbf{E}_{m \times m} \end{array} \right\|. \quad (7)$$

Численное интегрирование системы (6),(7) одновременно с системой (2) позволяет организовать итерационный вычислительный процесс метода Ньютона.

Если правая часть дифференциального уравнения, описывающего движение точки 1, явно зависит от вектора начальных условий \mathbf{z} , то задача о точке встречи имеет некоторые специфические особенности. В этом случае дифференциальное уравнение (2) принимает вид:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}), \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^m, \quad (8)$$

и уравнение в вариациях для матрицы Якоби решения этой системы отличается от уравнения (6).

В любом случае краевая задача о точке встречи сводится к следующей системе нелинейных уравнений относительно вектора \mathbf{z} и момента встречи t :

$$\Phi(\mathbf{z}, t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\mathbf{z}) \\ \dots \\ \varphi_k(\mathbf{z}) \\ x_1(\mathbf{z}, t) - g_1(t) \\ x_2(\mathbf{z}, t) - g_2(t) \\ x_3(\mathbf{z}, t) - g_3(t) \end{pmatrix} = 0 \quad (9)$$

$$\Phi(\mathbf{z}, t) \in \mathbb{R}^{k+3}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^m.$$

$x_i(\mathbf{z}, t), i = 1, 2, 3$ - первые 3 компоненты вектора $\mathbf{x}(t)$ - решения системы дифференциальных уравнений (8) с начальными условиями (3).

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ТОЧКЕ ВСТРЕЧИ МЕТОДОМ НЬЮТОНА

Как известно, $(q + 1)$ -ый шаг итерационного процесса метода Ньютона имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{z}^{(q+1)} \\ t^{(q+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{z}^{(q)} \\ t^{(q)} \end{pmatrix} - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{z}^{(q)}, t^{(q)}) \Phi(\mathbf{z}^{(q)}, t^{(q)}), \quad (10)$$

$\mathbf{J}(\mathbf{z}^{(q)}, t^{(q)})$ - матрица Якоби вектор функции Φ :

$$\mathbf{J}(\mathbf{z}, t) = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{z}) & \mathbf{0}_{k \times 1} \\ \nabla_{\mathbf{z}}^T x_1(\mathbf{z}, t) & \frac{\partial x_1(\mathbf{z}, t)}{\partial t} - \frac{\partial g_1(t)}{\partial t} \\ \nabla_{\mathbf{z}}^T x_2(\mathbf{z}, t) & \frac{\partial x_2(\mathbf{z}, t)}{\partial t} - \frac{\partial g_2(t)}{\partial t} \\ \nabla_{\mathbf{z}}^T x_3(\mathbf{z}, t) & \frac{\partial x_3(\mathbf{z}, t)}{\partial t} - \frac{\partial g_3(t)}{\partial t} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

$\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{z})$ - матрица Якоби вектор функции $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{z})$, $(\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{z}))_{i,j} = \partial \varphi_i / \partial z_j$,

$\mathbf{0}_{k \times 1}$ - нулевой вектор,

$$\nabla_{\mathbf{z}}^T x_i = \left\| \frac{\partial x_i}{\partial z_1} \quad \dots \quad \frac{\partial x_i}{\partial z_m} \right\| \text{-градиент функции } x_i \text{ по переменным } \mathbf{z}.$$

Для вычисления матрицы $\mathbf{J}(\mathbf{z}, t)$ необходимо иметь выражение для градиента функции $x_i(\mathbf{z}, t)$ по переменным \mathbf{z}, t . Сначала найдем частную производную функции $x_i(\mathbf{z}, t)$ по t . Очевидно, что:

$$\frac{\partial x_i(\mathbf{z}, t)}{\partial t} = f_i(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{z}), \quad (12)$$

$\mathbf{x}(t)$ - решение системы дифференциальных уравнений (8)

Далее, найдем векторы частных производных вектор функции $\mathbf{x}(\mathbf{z}, t)$ по начальным условиям z_1, \dots, z_m . Для определенности будем вычислять

$$\text{вектор } \mathbf{h}_i^T(\mathbf{z}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}^T(\mathbf{z}, t)}{\partial z_i} = \left\| \frac{\partial x_1(\mathbf{z}, t)}{\partial z_i} \quad \dots \quad \frac{\partial x_n(\mathbf{z}, t)}{\partial z_i} \right\|.$$

Сформулируем обобщение уравнения (6),(7), доказательство которого приведено в приложении.

Утверждение 1. При фиксированных начальных условиях \mathbf{z} вектор $\mathbf{h}_i(t)$ является решением следующей линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\mathbf{h}_i(t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{z})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{h}_i(t) + \frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}_i} \quad (13)$$

$$\mathbf{h}_i(0) = \delta_{n-m+i} \quad (14)$$

Где $\mathbf{x}(t)$ - решение системы дифференциальных уравнений (8) с начальными условиями (2). Через δ_j обозначен j -ый орт.

Таким образом, для того, чтобы найти градиент $\nabla_{\mathbf{z}} x_i(\mathbf{z}, t)$ по переменным z_1, \dots, z_m надо проинтегрировать m систем линейных неоднородных дифференциальных уравнений на интервале времени $[0; t]$ получив при этом m векторов столбцов $\mathbf{h}_i(T)$ – решений этих систем в момент времени t . Тогда:

$$\nabla_{\mathbf{z}}^T x_i(\mathbf{z}, t) = \left\| h_{1,i}(t) \quad \dots \quad h_{m,i}(t) \right\|. \quad (15)$$

Формулы для вычисления вектор функции $\Phi(\mathbf{z})$ и ее матрицы Якоби получены. Это дает возможность организации итерационного вычислительного процесса метода Ньютона.

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ТОЧКЕ ВСТРЕЧИ МЕТОДОМ ПРИСТРЕЛКИ ПО УГЛУ

Уточним суть этого метода, основываясь на его описании, приведенном в [1]. Ограничимся рассмотрением 2-х мерного случая. Будем считать, что в начале движения точки 1 (в начале координат) находится наблюдатель, который имеет возможность ставить эксперименты по реализации траектории движения точки 1 с разными начальными углами бросания, измерять расстояние между траекториями точки 1 и точки 2 и угол между радиус векторами положений этих точек. Целью его наблюдений является определение такого начального угла бросания θ_0 , при котором траектории точек пересекутся. Во время эксперимента с номером k наблюдатель измеряет угол $\Delta\theta_k$ между векторами положений точки 1 и точки 2 в момент времени, когда расстояние между этими точками минимально и корректирует

начальный угол бросания на эту разность. Таким образом, если на шаге с номером k значение угла бросания равно θ_k , то итерация с номером k этого метода выглядит следующим образом:

1. вычисляется момент времени, при котором расстояние между точками минимально:

$$t_{k+1} \in \underset{\tau}{\text{Arg min}} \{ \Phi_1^2(\tau, \theta_k) + \Phi_2^2(\tau, \theta_k) \} \quad (16)$$

2. вычисляется рассогласование положений точки 1 и точки 2 в этот момент по углу места:

$$\Delta\theta_{k+1} = \arcsin \frac{[\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2]}{|\mathbf{S}_1| |\mathbf{S}_2|} \quad (17)$$

3. производится поправка начального угла бросания

$$\theta_{k+1} = \theta_k - \Delta\theta_{k+1}$$

4. Процесс повторяется до тех пор, пока абсолютная величина поправки по начальному углу бросания $\Delta\theta_{k+1}$ не станет меньше некоторого заданного наперед малого числа.

Здесь $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2$ - радиус векторы положения точки 1 и точки 2 в момент времени t_{k+1} , $[\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2]$ - их векторное произведение. Связь между углами бросания на текущей итерации и последующей итерации можно проследить на рисунке 1.

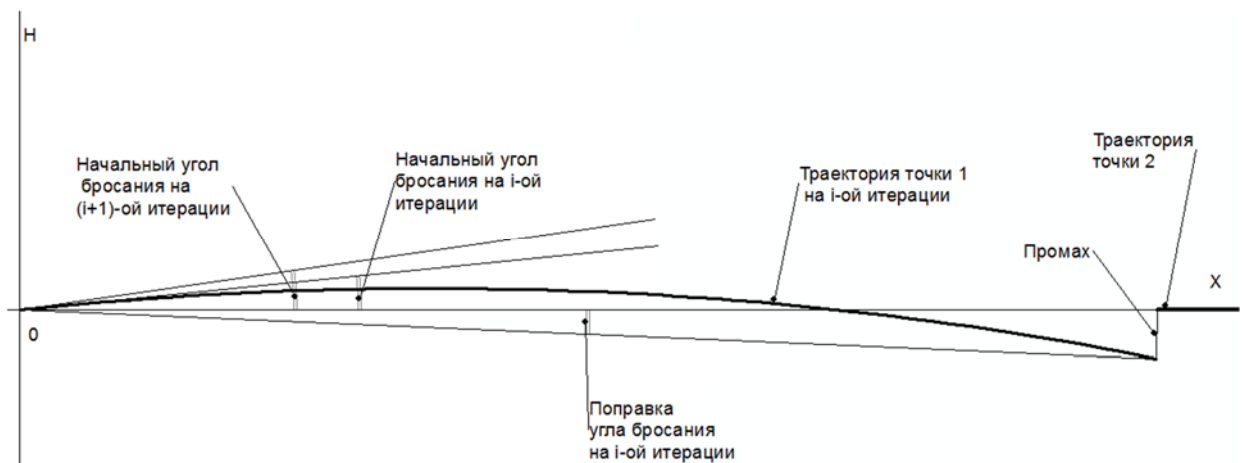


Рисунок 1 - Связь между углами бросания на последовательных итерациях.

Несмотря на свою кажущуюся очевидность, метод пристрелки по углу сходится не во всех случаях. Попробуем понять причины расходимости этого метода на простейшем примере, построив геометрическую иллюстрацию его работы, а также проведем сравнение этого метода с методом Ньютона.

Пример 1.

Примем для точки 1 упрощенную баллистическую модель движения. Землю будем считать плоской, неподвижной, без атмосферы. Движение точки 2 будем считать равномерным, прямолинейным и происходящим в плоскости движения точки 1. Задача о точке встречи состоит в нахождении начального угла бросания точки 1, обеспечивающего встречу с точкой 2. Модуль начальной скорости точки 1 считается известным и равным V_0 .

Движение точки 1 описывается следующими уравнениями:

$$x_1(t) = V_0 t \cos \theta_0$$

$$x_2(t) = V_0 t \sin \theta_0 - \frac{gt^2}{2}$$

$g = 9,8 \text{ м/с}^2$ - ускорение свободного падения, θ_0 - начальный угол бросания.

Движение точки 2 по осям координат описывается двумя линейными уравнениями с известными коэффициентами:

$$g_1(t) = y_{10} + w_1 t \tag{18}$$

$$g_2(t) = y_{20} + w_2 t \tag{19}$$

Система нелинейных
уравнений **Ошибка! Источник ссылки не найден.** сводится к двум уравнениям относительно времени встречи T и начального угла бросания $z_1 = \theta_0$

$$\Phi(z_1, T) = \left\| \begin{array}{l} V_0 T \cos z_1 - y_{10} - w_1 T \\ V_0 T \sin z_1 - gT^2/2 - y_{20} - w_2 T \end{array} \right\| = 0. \quad (20)$$

Матрица Якоби (11) имеет вид:

$$J(T, z_1) = \left\| \begin{array}{ll} V_0 \cos z_1 - w_1 & V_0 T \sin z_1 \\ V_0 \sin z_1 - gT - w_2 & V_0 T \cos z_1 \end{array} \right\| \quad (21)$$

Рассмотрим применение метода пристрелки по углу. На рисунке 2 изображены иллюстрации к расчетам точки встречи для следующих параметров: начальная скорость движения точки 1 равна $V_0 = 200$ м/с, начальный угол бросания равен 75 град., скорость точки 2 равна $|w| = 500$ м/с. Время точки встречи взято равным 37 секунд от начала движения. Темным цветом отмечены секторы направлений движения точки 2 к точке встречи, при которых алгоритм пристрелки расходится.

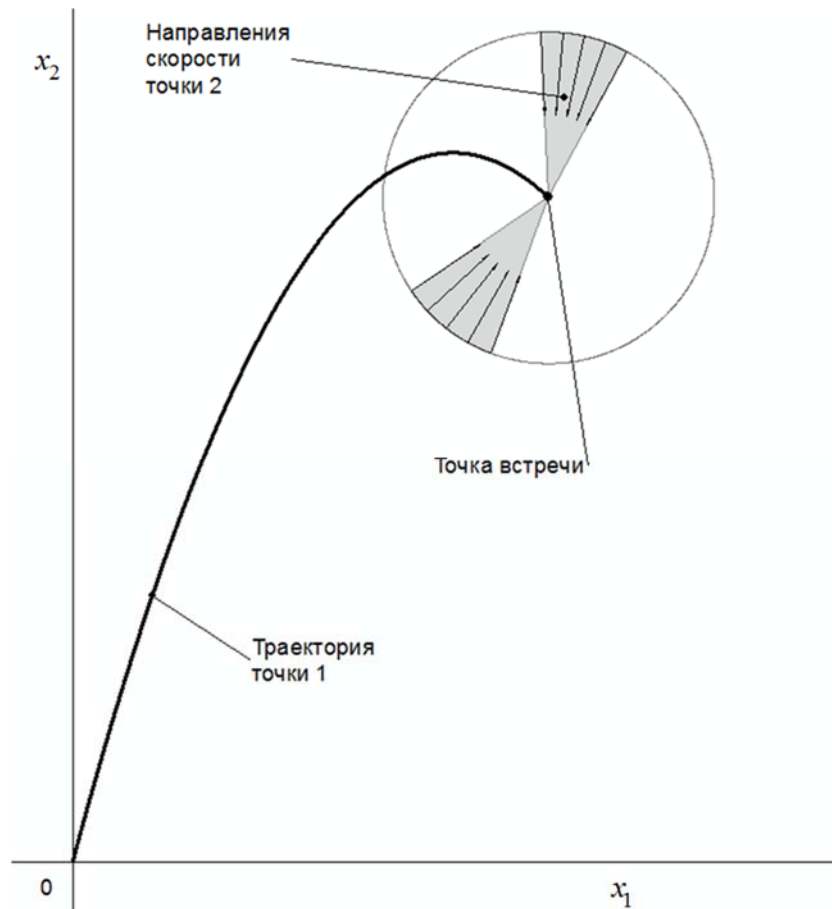


Рисунок 2 – Секторы расходимости алгоритма пристрелки по углу в заданной точке траектории

Попробуем проанализировать причину расходимости.

Пусть θ_B и T_B - решение системы уравнений (20), S_B - координаты точки встречи, V_1 - вектор скорости точки 1 в момент встречи, θ_k - приближение угла θ на шаге с номером k , лежащее в достаточно малой окрестности точки θ_B , а t_{k+1} - решение задачи (16). Линеаризуем выражение(17). Очевидно, что

$$S_1(t_{k+1}, \theta_k) \approx S_B + \Delta t_k V_1 + \frac{\partial S_1(t_B, \theta_B)}{\partial \theta} \Delta \theta_k,$$

$$S_1(t_{k+1}, \theta_k) = S_B + (t_{k+1} - t_B) w.$$

Тогда

$$\Delta \theta_{k+1} = \frac{[S_1(t_{k+1}, \theta_k), S_2(t_{k+1}, \theta_k)]}{|S_1(t_{k+1}, \theta_k)| |S_2(t_{k+1}, \theta_k)|} \approx \frac{[S_B, w - V_1]}{|S_B|^2} \Delta t_k + \frac{\left[\frac{\partial S_1(t_B, \theta_B)}{\partial \theta}, S_B \right]}{|S_B|^2} \Delta \theta_k \quad (22)$$

Если $[S_B, w - V_1] = 0$, а коэффициент при истинном рассогласовании угла бросания по модулю больше 2:

$$k_0 = \frac{\left[\frac{\partial S_1(t_B, \theta_B)}{\partial \theta}, S_B \right]}{|S_B|^2} \geq 2, \quad (23)$$

то вычислительный процесс заведомо расходится. Действительно, первое слагаемое в правой части (22) равно нулю, а за счет второго слагаемого, расстояние от точки θ_{k+1} до оптимальной точки θ_B будет заведомо превосходить расстояние от точки θ_k до θ_B . В частности, в рассмотренном примере коэффициент $k_0 = -2.03$.

Построим множество точек встречи, в которых будет выполнено неравенство(23). Выделенная область *I* на рисунке является областью достижимости точки 1 (множеством точек, через которые проходит траектория точки 1 при каком-то значении параметра θ_0). Верхняя граница этой области описывается уравнением в полярных координатах (R - радиус, ε - полярный угол):

$$R = \frac{V_0^2}{g} \frac{(1 - \sin \varepsilon)}{\cos^2 \varepsilon} .$$

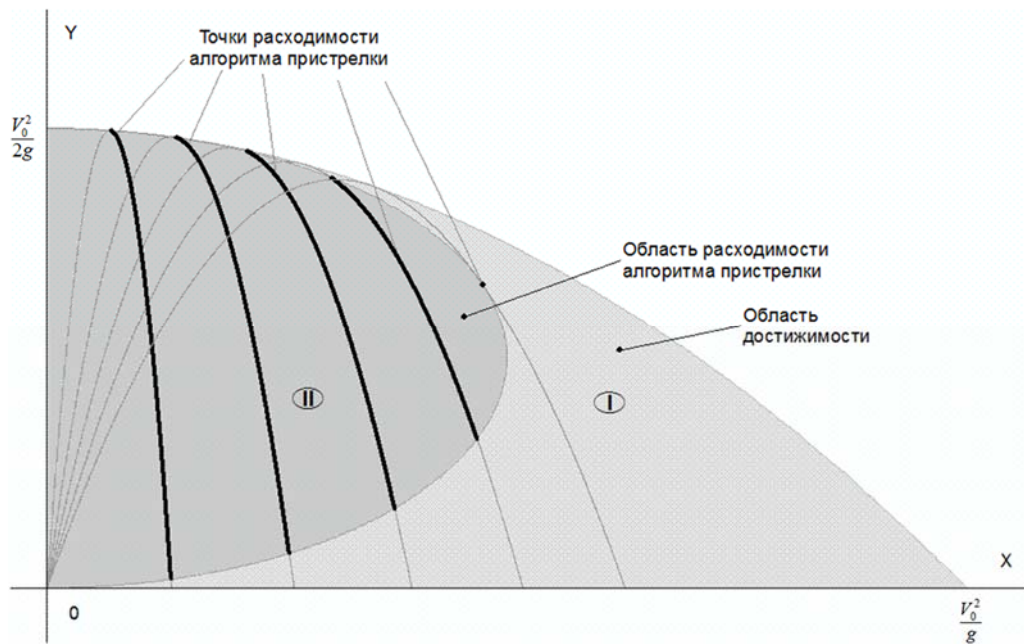


Рисунок 3 - Область расходимости алгоритма пристрелки по углу

Область *II*, выделенная более темным цветом на фоне области *I* показывает множество точек в которых $k_0 \geq 2$. Если точка встречи лежит на навесной части траектории, принадлежащей области *II*, то алгоритм пристрелки может расходиться при реализации некоторых траекторий точки 2. Эти части траекторий выделены жирным цветом.

Метод пристрелки можно усовершенствовать, обеспечив сходимость на любой части траектории точки 1. Для этого, в случае, когда $k_0 > 2$ достаточно вычисленный по формуле угол рассогласования разделить на модуль k_0 :

$$\Delta\theta_{k+1} = \frac{\Delta\theta_{k+1}}{|k_0|}. \quad (24)$$

Прямое применение этой формулы не дает возможности экономить вычислительный ресурс. Действительно, вычисление коэффициента k_0 требует вычислений вектора $\partial\mathbf{S}_1(t_{k+1}, \theta_k)/\partial\theta$, который вычисляется путем интегрирования уравнения в вариациях и преимущества метода пристрелки теряются. Вместо этого можно оценить максимально возможную величину коэффициента k_0 по всем возможным траекториям

$$k_{\max} = \max_{\theta, t} k_0.$$

Если на очередном шаге итерационного алгоритма пристрелки не выполняется условие релаксации минимального расстояния между точками 1 и 2, то есть расстояние на следующем шаге увеличилось, вместо того, чтобы уменьшиться:

$$\Phi_1^2(t_{k+2}, \theta_{k+1}) + \Phi_2^2(t_{k+2}, \theta_{k+1})t_{k+1} \geq \Phi_1^2(t_{k+1}, \theta_k) + \Phi_2^2(t_{k+1}, \theta_k),$$

то формула расчета вычисления поправки по углу изменяется на следующую:

$$\Delta\theta_{k+1} = \frac{1}{k_{\max}} \arcsin \frac{[\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2]}{|\mathbf{S}_1||\mathbf{S}_2|}.$$

После такой модификации алгоритм начинает сходиться. В частности, для настоящего примера $k_{\max} \approx 2,3$.

Отметим, что при выводе выражения (23) для коэффициента k_0 явный вид системы дифференциальных уравнений движения точки 1 не использовался. Поэтому полученный результат имеет универсальный характер и может быть распространен и на более сложные случаи движения точки 1.

Рассмотрим применение метода Ньютона. Если начальное приближение θ_0 выбрано удачно (достаточно разумно), то метод Ньютона

решения системы уравнений (20) сходится за несколько итераций, хотя и требует дополнительного интегрирования системы дифференциальных уравнений в вариациях (13), (14). В рассматриваемом примере эта система интегрируется аналитически, а результат интегрирования приведен в формуле для матрицы Якоби (21). Если начальное приближение θ_0 выбрано неудачно, то траектории метода Ньютона будут расходиться или сходиться, но не к тому корню, который требуется. Для рассматриваемого примера, в виду его простоты, подобрать алгоритм формирования «подходящего» начального приближения не составляет труда. В сложных случаях, когда подобрать алгоритм формирования начального приближения не удастся, рекомендуется применять демпфированный метод Ньютона [2]. Отличие этого метода от «классического» метода Ньютона заключается в регулировке шага итерационного процесса, предотвращающей большие шаги. Мной была успешно опробована регулировка шага методом дихотомии – деления рассчитанного методом Ньютона шага пополам до тех пор, пока не выполнится условие релаксации минимального расстояния между траекториями точки 1 и 2:

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{z}^{(q+1)} \\ t^{(q+1)} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \mathbf{z}^{(q)} \\ t^{(q)} \end{matrix} \right\| - \alpha_{q+1} \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{z}^{(q)}, t^{(q)}) \Phi(\mathbf{z}^{(q)}, t^{(q)})$$

$$\alpha_{q+1} = 2^{-j} - \text{регулируемый коэффициент.}$$

Сравнение усовершенствованного метода пристрелки по углу с методом Ньютона свидетельствует не в пользу последнего. Главное преимущество метода пристрелки заключается в его быстродействии. Если коэффициент $k_0 < 2$, то при одинаковых начальных приближениях методы сходятся примерно за одно и то же количество итераций. При этом, метод пристрелки не требует дополнительного численного интегрирования. Если $k_0 \geq 2$ количество итераций усовершенствованного метода пристрелки превосходит примерно в 1,5 раза количество итераций метода Ньютона.

Несмотря на это, применение метода пристрелки существенно экономит вычислительный ресурс и в этом случае.

4. РАСЧЕТ ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТОЧКИ ВСТРЕЧИ

Примем допущение, что вектор начальных условий $\hat{\mathbf{a}}$, при котором была решена задача о точке встречи, отличается от истинного вектора $\mathbf{a}_{\text{ист}}$ на некоторый достаточно малый вектор погрешностей $\Delta\mathbf{a}$:

$$\Delta\mathbf{a} = \hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a}_{\text{ист}},$$

который является векторной случайной величиной, имеющей нормальное распределение с нулевым средним и корреляционной матрицей \mathbf{K} (M - символ математического ожидания):

$$M\Delta\mathbf{a} = \mathbf{0},$$

$$M\Delta\mathbf{a}[\Delta\mathbf{a}]^T = \mathbf{K}$$

Пусть $\hat{\mathbf{z}}, \hat{T}$ - решение задачи о точке встречи, соответствующее вектору $\hat{\mathbf{a}}$.

Введем в рассмотрение вектор промаха – вектор разности между векторами положений точки 1 и точки 2 в расчетный момент встречи:

$$\mathbf{P}(\hat{\mathbf{z}}, \hat{T}) = \begin{pmatrix} \Phi_{k+1}(\hat{\mathbf{z}}, \hat{T}) \\ \Phi_{k+2}(\hat{\mathbf{z}}, \hat{T}) \\ \Phi_{k+3}(\hat{\mathbf{z}}, \hat{T}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(\hat{\mathbf{z}}, \hat{T}) - g_1(\hat{T}) \\ x_2(\hat{\mathbf{z}}, \hat{T}) - g_2(\hat{T}) \\ x_3(\hat{\mathbf{z}}, \hat{T}) - g_3(\hat{T}) \end{pmatrix} \quad (25)$$

Поскольку вектор $\hat{\mathbf{a}}$, при котором решалась задача о точке встречи, отличался от истинного, то вектор промаха (25) отличается от нулевого. Найдем корреляционную матрицу вектора промаха.

Утверждение 2. Вектор промаха (25) является векторной случайной величиной распределенной по нормальному закону с нулевым средним и корреляционной матрицей:

$$\mathbf{K}_p = \mathbf{L}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{z}}, \hat{T})\mathbf{K}\mathbf{L}^T(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{z}}, \hat{T}),$$

где матрица $\mathbf{L}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{z}}, \hat{T})$ определена следующим образом:

$$\mathbf{L}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{z}}, \hat{T}) = \begin{pmatrix} h_{1,1}(\hat{T}) & h_{2,1}(\hat{T}) & \dots & h_{(n-m),1}(\hat{T}) \\ h_{1,2}(\hat{T}) & h_{2,2}(\hat{T}) & \dots & h_{(n-m),2}(\hat{T}) \\ h_{1,3}(\hat{T}) & h_{2,3}(\hat{T}) & \dots & h_{(n-m),3}(\hat{T}) \end{pmatrix} \quad (26)$$

Здесь $h_i^T(\hat{T}) = \left\| h_{i,1}(\hat{T}) \quad h_{i,2}(\hat{T}) \quad \dots \quad h_{i,n}(\hat{T}) \right\|$ - решение системы

дифференциальных уравнений на отрезке времени $[0; \hat{T}]$:

$$\frac{d\mathbf{h}_i(t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{z})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{h}_i(t),$$

$$\mathbf{h}_i(0) = \delta_i .$$

Обоснование Утверждения 2 приведено в Приложении 2.

Отметим, что вектор промаха имеет такую же корреляционную матрицу как и вектор разброса траектории точки 1 в точке встречи по начальным условиям \mathbf{a} .

Для иллюстрации приведенного утверждения рассмотрим следующий пример.

Пример 2.

Усложним математическую модель, рассмотренную в разделе 2, добавив в нее влияние атмосферы, плотность которой будем считать не зависящей от высоты. Уравнения движения точки 1 в вертикальной плоскости в траекторной системе координат имеют вид:

$$\dot{x}_1 = x_3 \cos x_4$$

$$\dot{x}_2 = x_3 \sin x_4$$

$$\dot{x}_3 = -g \sin x_4 - \frac{C_x(z_1)\rho}{2m} x_3^2$$

$$\dot{x}_4 = -g \frac{\cos x_4}{x_3}$$

$$x_i(0) = a_i = 0, \quad (0.1)$$

$$x_2(0) = a_2 = 0,$$

$$x_3(0) = a_3 = 200 ,$$

$$x_4(0) = z_1$$

x_1, x_2 - положение точки по осям координат, x_3 - земная скорость V ,
 x_4 - угол наклона траектории θ ,

$$C_x(z_1) = 0,001 \left[0,8 + \frac{3,2}{\pi^2} \left(z_1 - \frac{\pi}{4} \right)^2 \right] \quad - \quad \text{коэффициент лобового}$$

сопротивления, функционально зависящий от начального угла бросания,

$\rho = 1,2 \text{ кг} / \text{м}^3$ - плотность атмосферы, $m = 50 \text{ кг}$ - масса точки 1.

Точка 2 движется равномерно и прямолинейно, в соответствии с уравнениями (18), (19) со скоростью 500 м./с.

Требуется найти начальный угол бросания $z_1 = x_4(0)$.

График изменения коэффициента C_x в зависимости от начального угла бросания приведен на рисунке 4.

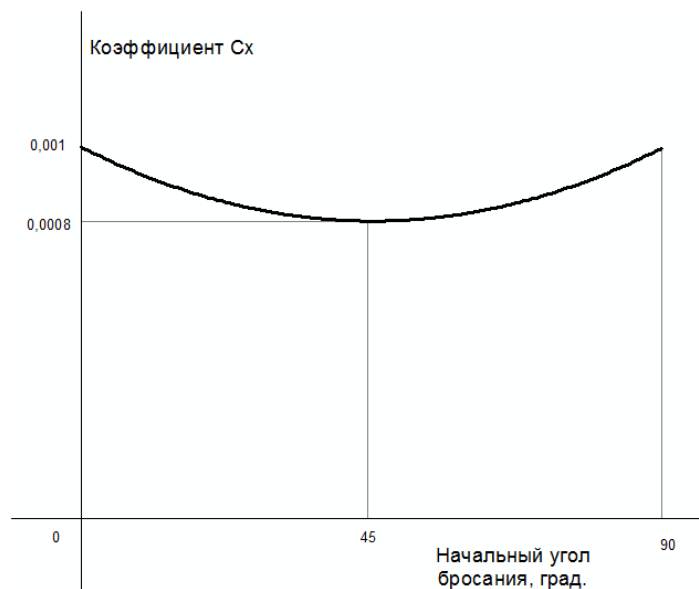


Рисунок 4 - Зависимость коэффициента C_x от начального угла бросания

Количество ограничений k на неизвестное начальное условие z_1 равно нулю.

Система уравнений (9) имеет вид:

$$\Phi(T, z_1) = \begin{vmatrix} x_1(T, z_1) - y_{10} - w_1 T \\ x_2(T, z_1) - y_{20} - w_2 T \end{vmatrix} = 0,$$

где $x(t)$ решение системы 4-х нелинейных дифференциальных уравнений (8) с правой частью:

$$\mathbf{f}^T(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \begin{vmatrix} x_3 \cos x_4 & x_3 \sin x_4 & (-g \sin x_4 - \frac{C_x(z_1)\rho}{2m} x_3^2) & -\frac{g \cos x_4}{x_3} \end{vmatrix}$$

и начальными условиями $\mathbf{x}^T(0) = \|0 \quad 0 \quad V_0 \quad z_1\|$, $V_0 = 200$.

Матрица Якоби формируется в соответствии с (11) и равна:

$$\mathbf{J}(\mathbf{z}, t) = \begin{vmatrix} h_{11}(t) & f_1(t) - w_1 \\ h_{12}(t) & f_2(t) - w_2 \end{vmatrix}$$

где $\mathbf{h}_1(t) \in \mathbb{R}^4$ -решение системы дифференциальных уравнений (13),(14), в которой соответствующие функции имеют вид:

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{z})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cos x_4 & -x_3 \sin x_4 \\ 0 & 0 & \sin x_4 & x_3 \cos x_4 \\ 0 & 0 & -\frac{C_x(z_1)\rho}{m} x_3 & -g \cos x_4 \\ 0 & 0 & \frac{g \cos x_4}{x_3^2} & \frac{g \sin x_4}{x_3} \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}^T(\mathbf{x}, \mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\frac{\rho x_3^2}{m} \alpha(z_1 - \pi/4) & 0 \end{vmatrix}$$

$\alpha = 6,4 \times 10^{-3} / \pi^2$ - константа.

Метод Ньютона, так же, как и усовершенствованный метод пристрелки, сходится к решению за несколько итераций.

На рисунке 5 изображены эллипсоиды рассеяния для точек встречи, расположенных на траектории точки 1 с траекторными временами

$t = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 37$ с и следующими величинами дисперсий разбросов начальных условий:

$$\sigma_1^2 = Mx_1^2(0) = 400m^2, \quad \sigma_2^2 = Mx_2^2(0) = 400m^2,$$

$$\sigma_v^2 = M(V - V_0)^2 = 9m^2/c^2.$$

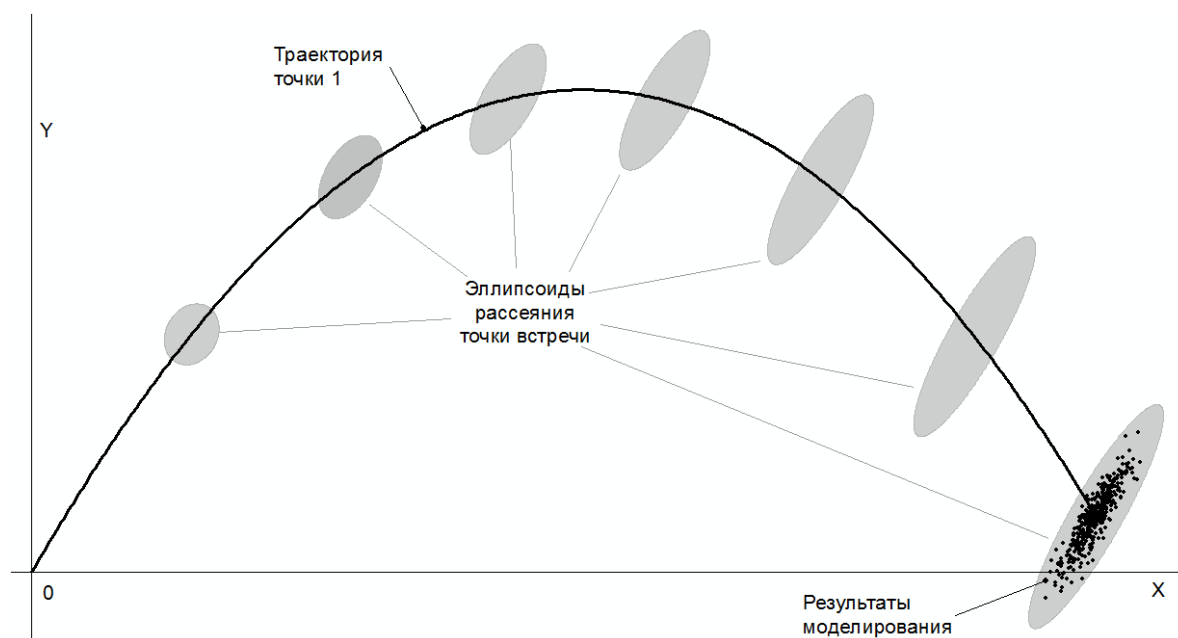


Рисунок 5 – Изменение эллипсоидов рассеяния точки встречи вдоль траектории

На последнем справа эллипсоиде рассеяния, с траекторным временем точки встречи 37 с, приведены результаты моделирования точки встречи методом Монте Карло. Как видно из рисунка, результаты моделирования соответствуют эллипсоиду рассеяния. Большая полуось эллипсоида рассеяния линейно зависит от траекторного времени и примерно остается параллельной вектору начальной скорости бросания. Это объясняется наличием разброса по начальной скорости бросания точки 1.

Выводы

1. Метод пристрелки по углу в ряде случаев расходится и имеет ограниченную область применения. Предложен усовершенствованный метод пристрелки по углу, имеющий более широкие границы применения.

2. Рассмотрен альтернативный численный метод, основанный на методе Ньютона. Этот метод работает надежно при условии того, что

начальное приближение выбрано достаточно удачно. Произведена «доводка» метода Ньютона к рассматриваемому классу задач.

3. Сравнение метода Ньютона и усовершенствованного метода пристрелки свидетельствует о явных преимуществах метода пристрелки, во-первых, из-за быстродействия, во-вторых, из-за простоты реализации.

4. Произведено обобщение системы дифференциальных уравнений в вариациях для случая функциональной зависимости правой части от начальных условий.

5. Приведен метод расчета корреляционной матрицы вектора промаха.

Приложение 1.

Пусть $\mathbf{x}(t)$ - решение системы дифференциальных уравнений (8) с начальными условиями $\mathbf{x}^T(0) = \|\mathbf{a} \quad \mathbf{z}\|$, а $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ - решение той же системы (8) с начальными условиями $\tilde{\mathbf{x}}^T(0) = \|\mathbf{a}^T \quad \mathbf{z}^T + \varepsilon \delta_i^T\|$, где ε - малое число, а через δ_j обозначен j -ый орт. Обозначим $\Delta \mathbf{x}(t) = \tilde{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)$, а через

$\mathbf{h}_i(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta \mathbf{x}(t)}{\varepsilon} \right]$ - вектор частных производных решения системы дифференциальных уравнений (8) по начальному условию с номером $n - m + i$.

Тогда,

$$\begin{aligned} \frac{d(\Delta \mathbf{x}(t))}{dt} &= \mathbf{f}(t, \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{z} + \varepsilon \delta_i) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}) = \\ &= \frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{z})}{\partial \mathbf{x}} \Delta \mathbf{x}(t) + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{z})}{\partial z_i} + o(\varepsilon) \end{aligned}$$

Разделив левую и правую части полученного равенства на ε и переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем равенство(13),(14).

Приложение 2.

Включим в число аргументов вектор функции промаха (25) вектор начальных условий \mathbf{a} . Тогда, в окрестности точки $\hat{\mathbf{a}}$ решение $\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{z}(\hat{\mathbf{a}})$ и $\hat{T} = T(\hat{\mathbf{a}})$ задачи о точке встречи можно рассматривать как функции вектора $\hat{\mathbf{a}}$ заданные неявно, при помощи системы уравнений:

$$\mathbf{P}(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{z}, T) = 0.$$

Очевидно, что реализовавшийся вектор промаха будет равен $\mathbf{P}(\mathbf{a}_{\text{ист}}, \hat{\mathbf{z}}, \hat{T})$. Линеаризуем этот вектор промаха в окрестности точки $\mathbf{a}_{\text{ист}}$, рассматривая \mathbf{z} и T как неявно заданные функции \mathbf{a} . Очевидно:

$$\mathbf{P}(\mathbf{a}_{\text{ист}}, \hat{\mathbf{z}}, \hat{T}) \approx \mathbf{P}(\mathbf{a}_{\text{ист}}, \mathbf{z}_{\text{ист}}, T_{\text{ист}}) + \left[\frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{a}_{\text{ист}}, \mathbf{z}_{\text{ист}}, T_{\text{ист}})}{\partial \mathbf{z}} \frac{\partial \mathbf{z}(\mathbf{a}_{\text{ист}})}{\partial \mathbf{a}} + \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{z}_{\text{ист}}, T_{\text{ист}})}{\partial T} \frac{\partial T(\mathbf{a}_{\text{ист}})}{\partial \mathbf{a}} \right] \Delta \mathbf{a}.$$

Но, в силу своего определения, $\mathbf{z}_{\text{ист}}$ и $T_{\text{ист}}$ удовлетворяют уравнению:

$$\mathbf{P}(\mathbf{a}_{\text{ист}}, \mathbf{z}_{\text{ист}}, T_{\text{ист}}) = 0,$$

По правилам дифференцирования неявно заданных функций [5], справедливо:

$$\frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{a}, \mathbf{z}, T)}{\partial \mathbf{a}} + \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{a}, \mathbf{z}, T)}{\partial \mathbf{z}} \frac{\partial \mathbf{z}(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} + \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{z}, T)}{\partial T} \frac{\partial T(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} = 0.$$

Поэтому, если вектор погрешностей $\Delta \mathbf{a}$ достаточно мал, то

$$\mathbf{P}(\mathbf{a}_{\text{ист}}, \hat{\mathbf{z}}, \hat{T}) \approx - \frac{\partial \mathbf{P}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{z}}, \hat{T})}{\partial \mathbf{a}} \Delta \mathbf{a},$$

или

$$\mathbf{P}(\mathbf{a}_{\text{ист}}, \hat{\mathbf{z}}, \hat{T}) \approx -\mathbf{L}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{z}}, \hat{T}) \Delta \mathbf{a},$$

где

$$\mathbf{L}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{z}}, \hat{T}) = \begin{vmatrix} h_{1,1}(\hat{T}) & h_{2,1}(\hat{T}) & \dots & h_{(n-m),1}(\hat{T}) \\ h_{1,2}(\hat{T}) & h_{2,2}(\hat{T}) & \dots & h_{(n-m),2}(\hat{T}) \\ h_{1,3}(\hat{T}) & h_{2,3}(\hat{T}) & \dots & h_{(n-m),3}(\hat{T}) \end{vmatrix}$$

Здесь $\mathbf{h}_i^T(\hat{T}) = \left\| h_{i,1}(\hat{T}) \quad h_{i,2}(\hat{T}) \quad \dots \quad h_{i,n}(\hat{T}) \right\|$ - решение системы дифференциальных уравнений на отрезке времени $[0; \hat{T}]$:

$$\frac{d\mathbf{h}_i(t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{z})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{h}_i(t)$$

$$\mathbf{h}_i(0) = \boldsymbol{\delta}_i$$

Поскольку вектор погрешностей $\Delta \mathbf{a}$ имеет нормальное распределение с нулевым средним и корреляционной матрицей \mathbf{K} , вектор промаха будет так же являться векторной нормально распределенной случайной величиной с нулевым средним и корреляционной матрицей:

$$\mathbf{K}_p = \mathbf{L}(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{z}}, \hat{T}) \mathbf{K} \mathbf{L}^T(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{z}}, \hat{T}) .$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н. С. Численные методы – М.: Главная редакция физико-математической литературы, 1973.
2. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978.
3. Поляк Б. Т. Метод Ньютона и его роль в оптимизации и вычислительной математике. – Труды ИСА РАН, т.26, стр. 48-66, 2006.
4. Чуйко В.С. Внешняя баллистика. – М.: ВВИА им. проф. Жуковского, 1958.
5. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Физматгиз, 1963.

Авторы:

А.Т. Бекишев

Ю.Б. Коробочкин